# FICHE – MÉTHODE

# ANALYSE 1 – SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici aux suites définies par un terme initial $u_0 \in \mathrm{D}$, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f$ est une fonction de la partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est supposée **continue**.

Cette étude commence toujours par une étude de propriétés intéressantes de la fonction $f$.

## 1. ÉTUDE QUALITATIVE DE LA CONVERGENCE

Il s'agit d'étudier ici les variations de la suite en utilisant les variations de la fonction $f$ et/ou le signe de $f(x) - x$ et d'en déduire la convergence ou la divergence.
Plan :

❶ Représenter graphiquement le comportement de la suite.
On commence par étudier les variations de $f$ ainsi que le signe de $f(x) - x$ et les points fixes de $f$.
Puis on représente le comportement graphique de la suite : sur un même graphique, on trace la courbe représentative de $f$ et la première bissectrice du repère en s'aidant de l'étude précédente pour les intersections et les positions relatives. On place $u_0$ sur l'axe des abscisses et on va verticalement sur la courbe, puis horizontalement sur la bissectrice, puis verticalement sur la courbe, puis… *ad libitum*
On peut alors aisément conjecturer le comportement de $(u_n)$ (monotonie, convergence).

❷ Déterminer un intervalle stable.
Il s'agit d'un intervalle **fermé** $\mathrm{I} \subset \mathrm{D}$ tel que $f(\mathrm{I})$ est inclus dans I, et qui contient $u_0$. Alors, par une récurrence immédiate, tous les $u_n$ sont dans I. C'est l'intérêt principal d'un tel intervalle : la suite n'en sort pas.
En pratique, on choisira le plus souvent (dans le cas où $f$ est croissante notamment) un intervalle fermé dont les extrémités sont des points fixes consécutifs de $f$ ou $\pm\infty$.

❸ Déterminer les seules limites possibles d'une telle suite.
Les valeurs nécessaires de la limite de $(u_n)$ sont les points fixes de $f$ sur I.

❹ Cas où $f$ est croissante sur I.
Dans ce cas, la suite$(u_n)$ est nécessairement monotone. On détermine son sens de variation en utilisant le signe de $f(x) - x$.
Si I est borné (au moins) du « bon » côté, alors $(u_n)$ est bornée et donc va converger.
Sinon, $(u_n)$ ne peut converger, faute de point fixe à l'horizon, et donc va diverger vers $\pm\infty$.

❺ Cas où $f$ est décroissante sur I.
Alors la fonction $f \circ f$ est croissante et, par conséquent, les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont nécessairement monotones de sens de variation contraires. On étudie alors les deux suites extraites en question comme indiqué en ❹.

*Si $f$ n'est pas monotone sur* I*, l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ peut être très difficile.*

## 2. ÉTUDE QUANTITATIVE DE LA CONVERGENCE, VITESSE DE CONVERGENCE

Il s'agit d'étudier et de quantifier la convergence en utilisant des arguments de dérivabilité, en particulier l'inégalité des accroissements finis pour étudier $|u_n - \ell|$, où $\ell$ est un (le) point fixe de $f$ sur I.
On suppose dans ce qui suit que $f$ est dérivable sur l'intervalle stable I et que $|f'| \leqslant \mathrm{M} < 1$ sur I. On établit alors successivement que

- $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \mathrm{M}|u_n - \ell|$ (IAF)
- puis, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n|u_0 - \ell|$

ce qui prouve que $(u_n)$ converge vers $\ell$ et que la vitesse de convergence est au moins géométrique.

Pour votre culture et pour que vous soyez avertis, les résultats suivants sont intéressants mais (très) hors-programme.

1. Si $|f'(\ell)| > 1$, il existe un voisinage $\mathrm{W}_0$ de $\ell$ tel que les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathrm{W}_0 \setminus \{\ell\}$ sortent au moins une fois de $\mathrm{W}_0$. Par conséquent, ces suites convergent vers $\ell$ si, et seulement si elles sont stationnaires à la valeur $\ell$. On dit que le point fixe est *répulsif*.
2. Si $|f'(\ell)| < 1$, il existe un voisinage W de $\ell$ tel que les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathrm{W}$ convergent vers $\ell$ avec une vitesse au moins géométrique. On dit que le point fixe est *attractif*.
3. Si $|f'(\ell)| = 1$, tout peut arriver, et s'il y a convergence, la vitesse de convergence peut être lente. On dit que le point fixe est *indifférent*.